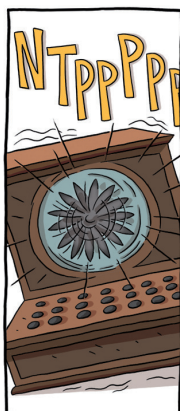


Sljedeće bilješke nisu vam nipošto nužne da biste uživali u *Stripologikonu*, ali mogu vam dati dodatne informacije o osobama i idejama. Ime ili pojam označeni plavom bojom ukazuju na činjenicu da se radi o izrazu koji je ujedno naveden i kao poseban unos, a riječi otisnute koso, ako se ne koriste za naglašavanje, ukazuju na stručne pojmove.

Aksiom Od *Euklidovog* doba, a njegov je rad na tragu *Aristotelove* filozofije o *logici*, matematičari se slažu da valjana teorija mora počivati na nekakvim (nekoliko) dogovorenih *temeljnih načela* za koje ne treba *dokaza*. To je logička nužnost želimo li izbjeći *beskonačnu regresiju* (situaciju u kojoj se nešto uvijek temelji na nečem drugom) s jedne i *kružno* (izvođenje dokaza za tvrdnje koje, čak i neizravno, polaze od pretpostavke da je inicijalna tvrdnja ionako bila istinita) razmišljanje s druge strane. Do početka 19. stoljeća smatralo se da su aksiomi *očite istine* o svijetu što je gledište koje je još uvijek više-manje na snazi u *Fregeovom* pristupu aksiomima kao odrazu skrivene logičke stvarnosti. No, nakon *Hilberta* te pod utjecajem matematičko-filozofske škole *formalizma* koja se razvila iz njegovih ideja, počelo se smatrati da aksiomi postoje neovisno i nisu dio nikakve vanjske stvarnosti, a jedini uvjet aksiomatskog sustava je da pojedinačni aksiomi budu *gramatički točni* (drugim riječima, dobro formulirani u skladu s pravilima logičkoga jezika na kojem su napisani) i *neovisni* (da ih se ne može izvoditi iz drugih aksioma određene teorije). Za skupove aksioma najvažnija je, pak, unutarnja *dosljednost* (da ne sadrže aksiome koji su međusobno kontradiktorni).



Algoritam Metodičan, postepeni postupak za koji postoje potpuno jasne i nedvoznačne upute, koji započinje u određenom početnom stanju i s vremenom završava željenim ishodom. Iako nema razloga da dobro napisan recept ili upute kako pronaći određenu lokaciju ili adresu ne nazovemo algoritmom, sam pojam je matematičke naravi i u toj se grani još uvijek i najviše koristi. Riječ „algoritam“ rezultat je europske transkripcije imena bagdaskog astronoma i matematičara iz devetog stoljeća Al Khwarizmija koji je popisao i promicao te metode, a mnoge je i sam izmislio. Njegov kompendij algoritama *Hisab al-jabr w'al-muqabala* općenito se smatra prvim algebarskim traktatom, a riječi iz naziva *al-jabr* korijen su riječi „algebra“. Primjer jednostavnog matematičkog algoritma metoda je kojom u osnovnoj školi učimo zbrajati dvoznamenkaste brojeve: „napišite dva broja jedan ispod drugog tako da su im desne znamenke poravnane na desnoj strani; zbrojite im posljednje znamenke; ako je zbroj manji od 10, napišite zbroj točno ispod desno poravnanih znamenki, ako je zbroj veći od deset, napišite drugu znamenku zbroja točno ispod desno poravnanih znamenki, a prvu znamenku dodajte zbroju znamenki koje se nalaze lijevo...“ i tako dalje. Vjerojatno je prvi sofisticiran zapadnjački algoritam napisao *Euklid* u svojim *Elementima* za izračun najvećeg zajedničkog djelitelja dva pozitivna broja. Algoritmi su na Zapadu postali popularni u 15. stoljeću s uvođenjem decimalnog sustava koji je bio potpuno suprotan rimskom brojčanom sustavu i omogućavao brzo računanje poput onog što smo ga maloprije

opisali. Numerički algoritmi odigrali su središnju ulogu u znanstvenim i tehnološkim revolucijama. Danas su algoritmi obično kodirani u naprednim sustavima koje nazivamo *programskim jezicima*. Često ih se prenosi Internetom, a sastavni su dio računalnih programa koji su platforma, radni dio i sama kičma računala i Interneta.



Aristotel Rođen 384. pr. n. e. u Stagiri u Trakiji i, uz Platona, najutjecajniji grčki filozof. Nakon odlaska s Platonove Akademije, Aristotel je razvio vlastitu filozofiju koja se od filozofije njegovog učitelja razlikovala po tome što je naglasak stavljao na sustavno promatranje stvarnosti i pokušaj oblikovanja općih induktivnih zakona. Njegovim najvećim doprinosom možda možemo smatrati sistematizaciju i pregled **logike** u nizu radova koje su kritičari kasnije objedinili pod naslovom *Organon* („instrument“ ili „oruđe“). Knjige koje čine *Organon*,

tj. *Kategorije*, *O tumačenju*, *Prethodna analitika*, *Naknadna analitika*, *Teme i Sofistična pobijanja* smatrale su se kanonom logike sve do 19. stoljeća. U samoj srži Aristotelove logike kombinacija nedvoznačnih sudova u *silogizmima* kojima se stvaraju novi sudovi, koji se razlikuju od početnih, ali iz njih nužno slijede. Aristotel je također izvršio ogroman i trajan utjecaj na matematiku, uglavnom zbog naglaska na *temeljnim načelima* s kojima mora početi svako logičko istraživanje. Upravo je taj pojam matematički utjelovio **Euklid** svojim **aksiomima** kojima započinje svaka teorija. Aristotel je umro 322 pr. n. e.



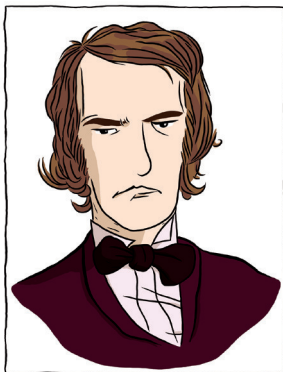
Atena Drevna grčka božica mudrosti, umjetnosti i grada. Atena je rođena pod punom vojnom spremom iz glave boga Zeusa, oca bogova, te je postala njegovom ljubimicom. Atena je bila zaštitnica starih Atenjana koji su je obožavali i kojima je, kako legenda kaže, poklonila maslinovo drvo. Partenon, u središtu Akropole, hram je posvećen upravo njoj - riječ dolazi od riječi *parthenos* što znači „djeвица“. Atena u **Eshilovoj** trilogiji **Orestija** ima središnju ulogu u nastanku mita o izumu atenske demokracije - suda s porotom - sustava koji se temelji na razumu, a suprotan je starijim sustavima u kojima

je sudski autoritet bio rezultat apsolutne moći vladara.



Bečki krug Skupina filozofa i filozofski usmjerenih znanstvenika koja se sastajala u Beču od 1924. do 1936. godine. Imali su dvostruki cilj: željeli su izgraditi snažnu empirističku filozofiju koristeći se novim saznanjima o znanstvenoj metodologiji iz **logike**, matematike i fizike te primijeniti metodologiju prirodnih znanosti na društvene. Moritz Schlick, filozof znanosti s

prirodoslovnim obrazovanjem, općenito se smatra vođom. Neki od najistaknutijih članova bili su: matematičari Hans Hahn, Olga Hahn-Neurath, Gustav Bergmann, Karl Menger i, vrlo kratko, Kurt Gödel, fizičar Philipp Frank, stručnjak za društvene znanosti Otto Neurath te filozofi Viktor Kraft i Rudolf Carnap. Grupa se isprva sastajala u neformalnom okruženju četvrtkom uvečer u bečkoj kavani „Café Central“, ali je kasnije prerasla u društvo i počela održavati javne sastanke. Usprkos neformalnom ustrojstvu, članovi su imali zajednička filozofska uvjerenja koja su izložili u nekoj vrsti manifesta naslovljenoj „Znanstveni pogled na svijet“. Članovi Kruga izjavili su da ih je za početak djelovanja nadahnuo rad Fregea, Russella i Einsteina, a izravni im je model bio *Tractatus Logico-Philosophicus* Ludwiga Wittgensteina. Filozofije logičkog pozitivizma i logičkog empirizma kojima se izražava pogled na svijet Kruga kažu da znanje dolazi s iskustvom, a time zapravo iz znanstvenog promatranja i eksperimenta, te postaje teorijom uz pomoć logičke analize i sinteze. No, u skladu s *Tractatusom*, članovi Bečkoga kruga smatrali su da se logika i matematika samo bave tautologijama pa, kao takve, ne proizvode znanje već samo jedno od oruđa za razradu empirijskog znanja. Prema pogledu na svijet Bečkoga kruga, tvrdnje koje se ne može svesti na iskustvo (poput teoloških ili etičkih) ne mogu biti točne ili pogrešne budući da su, doslovno, besmislene – nemaju smisao. Najekstremnija verzija ove tvrdnje je, zahvaljujući Carnapu, tvrdnju smatrala smislenom samo ako se njezina istinitost ili neistinitost mogu provjeriti algoritmom koji je svodi na opazivu istinu, što je nova inkarnacija Leibnizovog „*calculemus*“. Carnap je kasnije svoje viđenje pokušao pomiriti s Poučkom o nepotpunosti. Iako je Bečki krug u svojem izvornom obliku raspušten 1936. godine, nakon što je Schlicka ubio paranoični bivši student i nacistički simpatizer, njegov je duh živio i dalje. Većina je članova uspjela pobjeći iz Austrije i emigrirati u Englesku ili Sjedinjene Američke Države gdje su izvršili značajan utjecaj na razvoj poslijeratne filozofije.



Boole, George Rođen 1815. godine. Boole je bio samouki matematičar, a kasnije je postao profesor matematike i logike na Queen's Collegeu u Corku u Irskoj. Najveći doprinos matematici dao je u području logike. U knjizi *Istraživanje o zakonima misli* Boole je razvio ideju da se logički poučci mogu izraziti potpuno simboličkim jezikom zahvaljujući čemu ih se može koristiti u operacijama koje slične osnovnim aritmetičkim operacijama. U samoj srži Booleovog rada skriva se ideja o logičkom računu, sličnom Leibnizovim idejama. „Booleovo pretraživanje“ na Internetu, s korištenjem logičkih veznika „i“, „ili“ i „ne“, vodi nas do njegovih ideja. No, usprkos vrijednom

radu na pretvaranju logičkih argumenata u matematiku, Boole nije otkrio ništa posebno novo u samoj logici te se oslanjao isključivo na Aristotelov klasični model. U Booleovom sustavu, simboli poput X i Y (to su zapravo varijable kojima se mogu pripisati samo dvije vrijednosti, 0 ili 1) spajaju se pomoću tri već spomenuta

veznika te Aristotelovog veznika „implikacije“. (Zanimljivo je da je stoik Krisip te veznike definirao još u 3. stoljeću pr. n. e.). Primjena algebarskih identiteta, poput ova tri niže navedena, omogućuje logičarima da pojednostave logičke sudove i iz njih izvuku korisne zaključke:

$$(X \text{ ili } Y) = (Y \text{ ili } X)$$

$$\text{ne } (\text{ne } X) = X$$

$$\text{ne } (X \text{ i } Y) = (\text{ne } X) \text{ ili } (\text{ne } Y)$$

Ovaj logički formalizam ne može, međutim, izraziti semantičke veze među sudovima. Tako se, na primjer, ne može pokazati da gore navedeni X i Y zapravo predstavljaju dva suda „Platon je stariji od Sokrata“ i „Sokrat je stariji od Platona“. Ovaj je nedostatak riješen **predikatnim računom**. Boole je umro 1864. godine.



Cantor, Georg Rođen se 1845. godine. Studirao je u klasi nekih od najvećih matematičara svojega vremena, uključujući i Richarda Dedekinda i Karla Weierstrassa. Najveći je dio svoje karijere proveo kao predavač na Sveučilištu u Halleu na kojem je napisao seminarske radove u kojima izlaže prednosti ideja **teorije skupova**. Njegov najpoznatiji poučak kaže da skup takozvanih realnih brojeva (svi brojevi na *brojevnoj crti*, tj. prirodni brojevi 1, 2, 3, ... itd. zajedno s decimalnim brojevima, uključujući 0 i negativne brojeve) nije *prebrojiv*, odnosno ne može se pridružiti jedan-na-jedan cijelim brojevima 1, 2, 3, ... itd. Suprotno tome, kako je Cantor već dokazao, skup *racionalnih brojeva* koji sadrži sve razlomke prirodnih

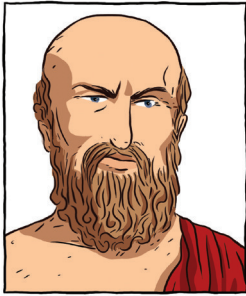
brojeva, poput $2/3$ ili $11/476$, jest *brojiv* i može se staviti u takav odnos. Budući da i prebrojivi i neprebrojivi skupovi imaju beskonačno mnogo elemenata, Cantorovi su rezultati zapravo dokazali da postoje različite, međusobno isključive, vrste beskonačnosti. Budući da su njegovi poučci bili kontraintuitivni, pa zbog toga i potpuno neočekivani, matematička je zajednica teoriju skupova primila dosta skeptično. Jedan od Cantorovih učitelja, veliki matematičar Leopold Kronecker, kao i matematički div **Henri Poincaré**, snažno su kritizirali skupove iako je drugi matematički velikan tog vremena, **David Hilbert**, bio jedan od najvećih Cantorovih proponenata. Definicija dvaju različitih „veličina“ beskonačnosti u skupu realnih brojeva, veće i manje, dovela je do pitanja treba li postojati i treća vrsta: postoji li podskup realnih brojeva koji nije niti prebrojiv niti se može staviti u odnos jedan-na-jedan s realnim brojevima? Cantor je pretpostavio da ne postoji, a tu se pretpostavku otad naziva „Hipotezom kontinuuma“ - *kontinuum* je druga riječ za brojevnju crtu. Cantor je godinama pokušavao **dokazati** Hipotezu kontinuuma, ali to mu nikad nije pošlo za rukom. Godine 1940. **Kurt Gödel** dokazao je da je Hipoteza kontinuuma *dosljedna*, a njome dominira aksiomatski sustav

teorije skupova (čime hipoteza nije i dokazana). Godine 1963. mladi američki matematičar Paul Cohen dokazao je da je teorija skupova *neovisna*, tj. da se iz nje ne može izvesti nikakav stvarni dokaz Hipoteze ili, drugim riječima, da su **aksiomi** teorije skupova dosljedni tome da je Hipoteza ili istinita ili neistinita. Za ovo je otkriće Cohen nagrađen Fieldsovom medaljom koja se često naziva i „Nobelovom nagradom za matematiku“. Cantor je bolovao od teških emotivnih poremećaja i u nekoliko je navrata završio u bolnici s dijagnozom melankolije koju su neki povjesničari matematike pripisali neprijateljskoj reakciji nekih matematičara na teoriju skupova, a drugi pak stalnoj tjeskobi zbog jalovih pokušaja dokazivanja Hipoteze kontinuum. Posljednjih deset godina svojega života Cantor se nije bavio matematikom, već je pokušavao potkrijepiti čudnovate teorije: a) da je Shakespeareove komade zapravo napisao elizabetinski filozof Sir Francis Bacon i b) da je Isus bio sin Josipa iz Arimateje. Ova potonja tvrdnja sastavni je dio različitih verzija legende o potrazi za svetim Gralom, a pronalazimo je obično i u nauci o ezoterici. Cantor je umro 1918. godine u umobolnici u koju su ga zatvorili protiv njegove volje.

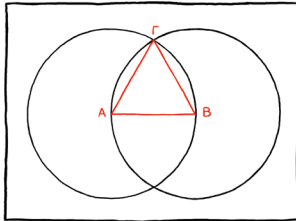


Dokaz Postupak koji rezultira **logičkom** provjerom matematičke ili logičke tvrdnje, a počinje skupom dogovorenih temeljnih načela (to su ili **aksiomi** ili već dokazane tvrdnje izvedene iz tih aksioma), te se nastavlja potpuno nedvoznačnim i neskrćenim logičnim koracima ili *pravilima izvođenja*. Dokazivanje geometrijskih sudova u **Euklidovim Elementima** se više od dva milijuna godina smatralo standardom izvrsnosti kojem matematički dokaz treba težiti. No, krajem 19. stoljeća logičari i filozofi počeli su preispitivati njegovu metodu te su utvrdili da je manjkava i to, uglavnom, u dva segmenta: a) u smislu logičke „očiglednosti“ aksioma i b) u logičkim prazninama u kojima se s formalnog sustava pravila prelazi na intuiciju, koja se kod Euklida uglavnom svodi na vizualnu geometriju. Na neki je način **Fregeov**, **Russellov** i **Whiteheadov** projekt *logicista* nastao kao reakcija na nesavršenosti Euklidovih dokaza i onih koji su nastali prema njegovom modelu. Logicisti su, kao i *formalisti* koji su radili na **temeljima matematike**, imali za cilj potpuno razvijenu teoriju i praksu rigoroznog dokaza kojima bi aritmetika (kao osnova

matematike) započinjala malim brojem dosljednih aksioma i s vremenom, putem dokaza, dovela do potpune istine. **Hilbertova** prijelomna pitanja koja je nazvao *Entscheidungsproblem* („problem odluke“) postavljena 1928. godine, a na koja je sedam godina kasnije odgovorio **Alan Turing**, jednaka su zahtjevu za potpuno moćnim dokaznim aparatom koji može dati *dokazivi* i *nedokazivi* odgovor na svaku matematičku tvrdnju putem rigoroznog **algoritma**.



Eshil Jedan od najvećih grčkih tragičara, prethodnik Sofokla i Euripida, Eshil je utemeljio ono što danas smatramo tragedijom. Uveo je drugog glumca u raniju dramsku formu koja se dotad koristila samo protagonistom i zborom te time izumio tehniku dramskog dijaloga. Rođen 525. prije Krista u Eleuzini pokraj Atene, borio se protiv Darijeve vojske na Maratonu (490. pr. n. e.) i Kserksa kod Salamine (480. pr. n. e.). Ova je druga bitka bila tema njegovog prvog komada *Perzijanci* (prvi put postavljen 472. pr. n. e.). Poznati su nam naslovi svih sedamdeset i devet komada koje je napisao, ali samo ih je sedam u potpunosti sačuvano. Od sačuvanih sedam, tri čine trilogiju *Orestija*.



Euklid Rođen 325. pr. n. e. Euklid je najstariji grčki matematičar čiji je rad sačuvan u izvornom obliku - poučci starijih matematičara uglavnom su opstali u prijepisima drugih autora. Živio je i radio u Aleksandriji, gdje ga se povezivalo s Velikom bibliotekom. Njegov opus magnum, *Elementi*, uspješnica je već dvadeset i tri stoljeća i, nakon Biblije, knjiga je s najvećim brojem izdanja na Zapadu. Iako mnogi poučci koje sadrži vjerojatno nisu Euklidovo otkriće, izbor, klasifikacija i pregled matematike toga doba u potpunosti su njegovo djelo. Knjiga *Elementi* veličanstveno je pojmovno zdanje koje je nadahnuo **Aristotel** svojim radom na **logici**, a počinje definicijama i temeljnim načelima, aksiomima, (*aitēmata* - doslovno „uvjeti“ - na Euklidovom izvornom grčkom) prolazeći kroz sve poučke i završavajući strogim **dokazom**. Iako su studenti logike u kasnijim razdobljima, posebice u vrijeme potrage za **temeljima matematike** i nakon toga, kritizirali Euklidov rad jer se previše oslanja na geometriju te uzima zdravo za gotovo i više od vlastitih aksioma, *Elementi* su imali ogroman utjecaj i s pravom ih se naziva vrelom matematičke metode. Euklid je umro oko 265. pr. n. e.



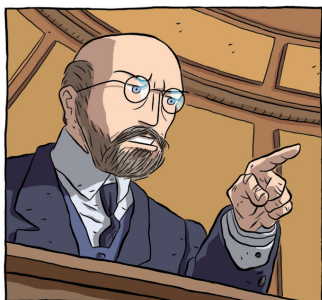
Frege, Gottlob Rođen 1848. godine, Frege je najveći dio svojeg matematičkog života proveo kao profesor na Sveučilištu u Ieni. Općenito ga se smatra ocem moderne **logike** za koju je znakovlje i metodu prvi put objavio 1879. godine u djelu *Begriffsschrift* (što u doslovnom prijevodu s njemačkoga znači „pojmovno pismo“). Frege je tako skrenuo s **Aristotelovog** traga te eksplicitno uveo pojam varijable i logičke tvrdnje. Umjesto starije vrste sudova poput „Sokrat je čovjek“, uveo je sudove poput „x je čovjek“ koje mogu biti istinite ili neistinite ovisno o vrijednosti koja se pridruži x - ovaj spomenuti sud je istinit ako je x jednak „Alecos“, a neistinit ako je x = „Manga“. Frege je također izumio

pojam kvantifikatora, univerzalnog (označava se kao \forall) koji sud čini istinitim za „svaki x “ i egzistencijalnog (označava se kao \exists) koji kaže da „postoji X “ koji sud čini istinitim. Kasnije je svoj novi logički sustav primijenio na potragu za temeljima matematike. Njegovo djelo *Grundgesetze der Arithmetik* (*Osnovni zakoni aritmetike*) prvo je veliko djelo škole logičizma čija je središnja postavka da je matematika zapravo grana logike. Prvi tom *Grundgesetzea* objavljen je 1893. godine, a drugi, koji sadrži i dodatak o Russelobom paradoksu, 1903. Iako je Fregeov logički simbolizam odbačen kao naporan, većina osnovnih koncepata i metoda koje je osmislio i danas su kičma logike. Nakon *Grundgesetzea* Frege nije objavio nikakav važniji rad. Posljednjih godina života postao je jako paranoičan te je napisao niz zadržanih traktata u kojima napada parlamentarnu demokraciju, sindikate, strance te posebice Židove, predlažući čak „konačno“ rješenje „židovskog problema“. Umro je 1925. godine.



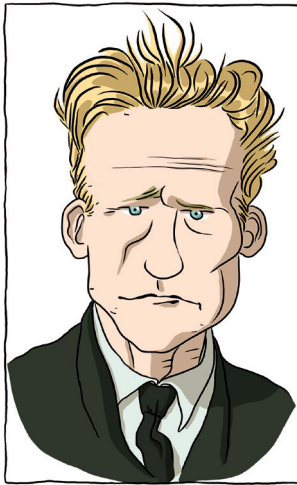
Gödel, Kurt Rođen je 1906. u Brnu (Brünn) u Moravskoj koja je u to vrijeme bila dijelom Austrougarskog carstva (danas je to grad Brno u Češkoj Republici). Gödel je studirao matematiku u Beču gdje ga je očarala matematička logika i pitanje temelja matematike. U doktorskom je radu unaprijedio Hilbertov Program dokazom Poučka o potpunosti kojim je utvrdio da se svi valjani sudovi Fregeove logike prvoga reda mogu dokazati skupom jednostavnih aksioma. Godine 1931. je, međutim, dokazao Poučak o nepotpunosti za logiku drugoga reda tj. logiku koja je dovoljno snažna da podrži aritmetičke ili jednako složene i složenije matematičke teorije. Gödel je postao jednim od najmlađih članova Bečkoga kruga iako ga je njegovo duboko usađeno, idealističko

vjerovanje u Platonovo neovisno postojanje matematičke stvarnosti s vremenom udaljilo od ostalih članova kruga koji su prigrlili materijalistički i empirijski pogled na svijet. Tijekom kasnih tridesetih, Gödel je dvaput završio u bolnici zbog teške melankolije. Godine 1940., nakon *Anschlussa*, tj. pripajanja Austrije nacističkoj Njemačkoj, uspio je sa suprugom pobjeći iz zemlje i transsibirijском se rutom uputio u Sjedinjene Američke Države. Postao je jednim od prvih članova Instituta za naprednu znanost u Princetonu, gdje je proveo ostatak života. Najvažnije mu je matematičko otkriće iz tog razdoblja dokaz da je Cantorova Hipoteza kontinuuma dosljedna aksiomima teorije skupova (tj. da im, ako je istinita, nije kontradiktorna). Na Princetonu se Gödel sprijateljiio s Albertom Einsteinom s kojim je neko vrijeme surađivao na teoriji relativnosti i tako postavio matematičku mogućnost rotirajućeg svemira koji se ne širi i u kojem putovanje kroz vrijeme može postati fizičkom stvarnošću. Kasnije je u životu postao jako paranoičan. Umro je u siječnju 1978. godine u bolnici u Princetonu u koju je primljen zbog liječenja bolesti urinarnog sustava koja nije bila opasna po život. Umro je zbog neishranjenosti: odbijao je jesti jer se bojava da ga bolničko osoblje pokušava otrovati.



Hilbert, David Hilbert je rođen 1862. godine u Königsbergu u Pruskoj (danas Kaliningrad u Rusiji), a veći je dio života proveo na Sveučilištu u Göttingenu, u to vrijeme najpoznatijem matematičkom središtu u svijetu. Jedan je od najvećih matematičara u povijesti i, uz [Henrija Poincaréa](#), najveći matematičar svojega doba. Dao je važan doprinos mnogim matematičkim granama uključujući teoriju nepromjenjivosti, teoriju algebarskih brojeva, funkcionalnu analizu, varijabilni račun, teoriju diferencijalnih jednadžbi i ostale, a nositelj je nove metode **dokaza**. Godine 1899. objavio je djelo *Grundlagen der Geometrie (Osnove geometrije)*, knjigu koja je geometriji dala čvrste temelje s novim **aksiomima**, te tako poboljšao **Euklidov** rad. U poznatom predavanju koje je održao 1900. godine na Međunarodnom matematičkom kongresu u Parizu, nastojao je dati panoramski pregled matematike dvadesetog stoljeća kroz dvadeset i tri važna otvorena pitanja. Jedanaest od tih problema, danas poznatih pod nazivom „Hilbertovi problemi“, u međuvremenu je u potpunosti riješen, sedam djelomično, a ostali – Osmorka, poznata i kao „Riemmanova hipoteza“ koja je među njima najpoznatija – još uvijek su neriješeni. Drugi problem je problem koji traži dokaz *dosljednosti* aritmetike (*potpunost se smatrala više ili manje očiglednom*) – i upravo je on potaknuo veliki dio rada na potrazi za temeljima i logičkom strukturom aritmetike, uključujući i **Gödelov**. Godina 1920-ih njegove zamisli iz prethodnih desetljeća rada na **temeljima matematike** kulminirale su radom koji je kasnije postao poznat pod nazivom „Hilbertov program“. Bio je to projekt za davanje formalnog oblika cjelokupnoj matematici na aksiomatskom temelju, uključujući i dokaz da je taj proces aksiomatizacije dosljedan. Hilbertovi bojni poklici da „u matematici ne postoji *ignorabimus*“ (tj. nema „nećemo znati“) i „moramo znati, znat ćemo“ – ovaj drugi je izgovorio samo nekoliko dana prije Gödelove prve najave **Poučka o nepotpunosti** – utjelovljuju samu bit optimizma potrage za temeljima. Iako su rezultati rada Kurta Gödela, **Alana Turinga** i Alonza Churcha stali na kraj Hilbertovoj grandioznoj ambiciji, Program je i dalje imao velikog utjecaja na logiku i potragu za temeljima, posebice na razvoj teorije dokaza. Iako je Hilbert naizgled bio utjelovljenje normalnosti i mentalnoga zdravlja, način na koji je postupao sa sinom Franzom sve to dovodi u pitanje. Kad je dječaku u petnaestoj godini dijagnosticirana šizofrenija, otac ga je poslao u umobolnicu u kojoj je dječak proveo ostatak života. Hilbert ga nikad nije posjetio. Umro je 1943. godine.

Intuicionizam To je filozofija matematike čiji je utemeljitelj veliki nizozemski matematičar Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881.-1966.) iako neki smatraju da joj je prethodnik zapravo **Henri Poincaré** jer je snažno vjerovao u ulogu intuicije u matematici. Intuicionizam se temelji na uvjerenju da su intuicija i vrijeme ključni za matematiku koja se ne može *formalizirati* i odvojiti od vremenskog aspekta onako kako bi to želio **Hilbert**. Za razliku od *logičara* poput **Fregea** i **Russella**, Brouwer je bio uvjeren da se **logika** temelji na matematici, a ne obrnuto. Također



je bio veliki protivnik poučaka **Georga Cantora** u **teoriji skupova** i smatrao ih je loše formuliranim. Doveo je u pitanje i odbacio logičke zakone u vremenskom vakumu, poput onog o *isključenoj sredini*, i matematičke tehnike koje su koristile još od vremena starih Grka, poput *reductio ad absurdum*. Brouwer je, zapravo, vjerovao da bi sve poučke koji se koriste gore spomenutim metodama za **dokazivanje**, kad se radi o beskonačnim skupovima matematičkih predmeta, trebalo izbaciti iz matematike. Zbog tog je gledišta briljantni britanski matematičar i logičar Frank Ramsey intuicionizam nazvao „matematičkim boljševizmom“. Iako je Brouwerovoj logici i matematici formalni oblik dao njegov student Arend Heyting, Brouwer je do kraja života bio skeptičan prema svakom pokušaju formaliziranja.



Leibniz, Gottfried ovaj veliki njemački filozof, matematičar, znanstvenik i izučavatelj **logike** rođen je 1646. godine. Bio je u diplomatskoj službi te bio politički savjetnik i povjesničar na dvoru nekoliko njemačkih vladara, a istovremeno se bavio svim teorijama. Izumitelj je *infinitezimalnog računa* paralelno, ali potpuno neovisno o Isaacu Newtonu te je također predložio znakovlje koje je u uporabi i danas. Bio je veliki zagovornik *filozofskog optimizma* te tvorac teorije

da je naš svijet „najbolji među svjetovima“ jer ga je stvorio svemoćni Bog koji nas istovremeno ljubi. Smatra se najvažnijim logičarom nakon **Aristotela** i prije **Boolea** budući da je začetnik ideje o *calculusu ratiocinatoru*. Bila je to neka vrsta računarske logike utemeljene na poučcima koja bi omogućila potpuno rigorozno i racionalno odlučivanje koje bi u potpunosti dokinulo sva neslaganja među racionalnim ljudskim bićima (kakvima ih je Leibniz smatrao). Na žalost, Leibniz nije uspio ostvariti jedan od projekata za kojim je najviše čeznuo. Umro je 1716. godine.

Logika Pojam očekivano pokriva široki spektar disciplina budući da vuče podrijetlo od jedne od semantički najbogatijih riječi grčkog jezika, *logos*, koja, među ostalim, može značiti i *riječ, govor, misao, razum, racio, racionalnost* i/ili *pojam*. Najbolje ju se, međutim, možda može opisati kao studiju metodičkog razmišljanja, dedukcije i dokazivanja. Knjige **Aristotelovog Organona** opsežna su studija deduktivnih obrazaca koje nazivamo *silogizmima* i koji su više od dva tisućljeća sinonim za logičko razmišljanje. Do sredine 19. stoljeća logiku se smatralo granom filozofije. No, s dolaskom **Boolea** i njegove algebre sudova te, što je još važnije, **Fregea** i „pojmovnog pisma“ koje je dovelo do **predikatnog računa**, logika se sve više približavala matematici. Nova je logika otkrila i skrivenu matematičku prirodu

te grane i njezinu potencijalnu ulogu u stvaranju solidnih **temelja za matematiku**. Osnovna tvrdnja **logicizma** - škole u filozofiji matematike čiji je začetnik Frege, a **Bertrand Russell** jedan od najistaknutijih sljedbenika - jest da se sva matematika može svesti na logiku ili, drugim riječima, da je matematika u biti *grana* logike. No, nakon godina potrage za temeljima matematike, a posebice nakon **Gödelovih** rezultata, logika je postala razvijeno raznoliko područje na razmeđu filozofije i matematike. U drugoj polovici 20. stoljeća sasvim je neočekivano primijenjena i u računarstvu u kojem je poslužila kao solidan temelj za stvaranje i provjeravanje računalnih programa i opreme te baza podataka i umjetne inteligencije.



Orestija Napisao ju je **Eshil**, a prvi je put izvedena u Dionizovom kazalištu u Ateni dvije godine prije pjesnikove smrti, 458. pr. n. e. Jedina je trilogija grčkih drama sačuvana u izvornom obliku iako joj nedostaje satirički igrokaz *Protej* koji se izvodio nakon trilogije. U prvom komadu trilogije, *Agamemnon*, naslovni junak i vođa grčkih snaga kod Troje, vraća se pobjedonosno u svoj rodni grad Arg sa zatočenicom, proročicom Kasandrom.

Iako mu se žena Klimenestra isprva naizgled raduje, kuje sasvim drugačiji plan. Zajedno s ljubavnikom, Agamemnonovim rođakom Egistom, ubija muža i postaje novom vladaricom Arga. U drugom komadu *Žrtvonoše* zbor žena prati Agamemnonovu kći Elektru na očev grob. Ožalošćena Elektra nada se osveti koju može provesti samo uz pomoć brata Oresta koji je u izgnanstvu. Kad se Orest potajice vrati u Arg, on i Elektra planiraju ubojstvo i ubiju Egista. Tada, u dramatičnoj sceni Klimenestra razdrhlji halje na grudima pružajući ih prema Orestovom maču pa on ubija i nju, vlastitu majku. Treći komad, *Eumenide* ili „Milostive“ jedan je od najneobičnijih u povijesti drame: u njemu, osim samoga Oresta, govore i bogovi ili druga nadnaravna bića. Zbor se sastoji od *Erineja* ili Furija, drevnih božica osвете koje istjeraju Oresta iz hrama u Delphima u kojem ga je Apolon ritualno očistio i otjeraju ga u Atenu. **Atena**, božica zaštitnica grada Atene, donosi dotad neviđenu odluku - barem kad se govori o bogovima - i prepušta građanima Atene da presude Orestu. To je mitološki začetak demokratskog izuma suda s građanskom porotom. Suđenje i donošenje presude odvijaju se kao što smo opisali u svršetku knjige iako je naš tekst samo približni i prilagođeni prijevod originalnih Eshilovih riječi.



Peano, Giuseppe Rođen 1858. godine, ovaj veliki talijanski matematičar i logičar proveo je najveći dio svojeg kreativnog života kao profesor na Sveučilištu u Torinu. Iako njegove ideje nisu bile utjecajne poput **Fregeovih**, i Peano je, kao i Frege, u potrazi za **temeljima matematike** osmislio znakovlje za **logiku prvoga reda** i sustav **aksioma** za aritmetiku koji se još uvijek koriste - naša se aritmetika zapravo službeno zove **Peanova aritmetika**. Peano je uvelike utjecao na **Bertranda**

Russella, posebice svojim logičkim znakovljem koje je bilo mnogo lakše koristiti od Fregeovog. Peano je smatrao da cjelokupnu matematiku treba formalizirati i izraziti zajedničkim, minimalističkim jezikom koji je rezultat svega nekoliko aksioma. No, kad je pokušao dati pregled vlastite verzije te univerzalne matematike u obliku udžbenika, studenti su se pobunili i udžbenik je na kraju povučen iz uporabe. Nadahnut pokušajima ujedinjavanja matematike korištenjem zajedničkog logičkog jezika, Peano je kasnije osmislio međunarodni pomoćni prirodni jezik kojim se mogu koristiti govornici različitih jezika, a koji se temelji na pojednostavljenoj verziji latinskog. Nazvao ga je *Latino sine flexion*. No, kao i mnogi drugi umjetni jezici, poput *esperanta*, *volapüka*, *ida* - svi odreda nastali u doba pretjeranog optimizma - i Peanova je umotvorina završila kao pusti san. Peano je umro 1932. godine.



Poincaré, Henri Rođen je 1854. godine u Nancyju u Francuskoj. Iako je studirao strojarstvo na *École Polytechnique* i na *École de Mines*, Poincaré je, uz **Davidu Hilberta**, postao najvećim matematičarom svoga doba. Nazivali su ga „posljednjim univerzalnim matematičarom“, to jest, posljednjim koji posjeduje dubinsko znanje o cjelokupnoj matematici svojeg vremena. Dao je značajan doprinos mnogobrojnim različitim matematičkim područjima uključujući i diferencijalne jednačbe, automorfne funkcije,

teoriju nekoliko složenih varijabli, vjerojatnost i statistiku. Djelom *Analysis situs* zapravo je stvorio važno dvadeseto matematičko polje *algebarske topologije*, a njegov je rad na trotijelnom problemu udario temelje onome što danas nazivamo *teorijom kaosa*. Usprkos velikom broju inovacija, Poincaré je bio vrlo praktičan čovjek koji se do kraja života, uz matematička istraživanja, bavio i vrlo „prizemnim“ stvarima kao što su, na primjer, inspekcijski nadzor rudnika i strojarski projekt koji bi omogućio da Eiffelov toranj funkcionira poput divovske antene koja bi slala vremenske signale moreplovcima. Bio je vjerojatno posljednji među velikim matematičarima koji je zagovarao staromodno poimanje matematike kao romantičke vjere u intuiciju, a ne strogost i formalizam. Takav stav postao je poznat zahvaljujući njegovoj reakciji na *teoriju skupova Georga Cantora* koju je nazvao „bolešću od koje će se matematika s vremenom izliječiti“. Njegov pogled na matematičko stvaranje, utjelovljen izjavom „logika je jalova ne oplodi li je intuicija“ neki smatraju pretečom škole *intuicionizma* Luitzena Brouwera, teorije koja se smatra antipodom Hilbertovom *formalizmu*. Poincaré je umro 1912. godine.

Poučak o nepotpunosti Godine 1931. dvadesetpetogodišnji **Kurt Gödel** dokazao je dva poučka koja ponekad nazivamo i „Teoremima nepotpunosti“ iako se povremeno taj naziv koristi i samo za prvi od dva spomenuta poučka. *Potpunost* logičkog sustava je svojstvo prema kojem svaki *dobro formuliran* sud u sustavu (tj. gramatički točan u skladu s pravilima sustava) može biti potvrđen ili pobijen dokazom iz **aksioma** tog istog sustava. Gödelov raniji *Poučak o potpunosti* pokazuje

da postoji takav jednostavni sustav aksioma za *logiku prvoga reda*. No, sveti gral *Hilbertovog* programa bilo je stvaranje *potpunog* i *dosljednog* aksiomatskog sustava koji može poduprijeti *aritmetiku*, drugim riječima matematiku cijelih brojeva. Takav bi sustav trebao *logiku drugoga reda*, tj. sustav koji može prihvatiti i *skupove* kao vrijednosti ili varijable. Gödel je šokirao svijet matematike dokazavši u svojem poznatom radu „O formalno neodlučivim postavkama *Principia Mathematica* i srodnih sustava” da svaki dosljedni aksiomatski sustav za aritmetiku, u obliku kakav se razvija u Principii, nužno mora biti *nepotpun*. Preciznije rečeno, prvi od dva poučka o nepotpunosti kaže da će u logičkom aksiomatskom sustavu, koji je dovoljno bogat da može opisati svojstva cijelih brojeva i običnih aritmetičkih operacija, uvijek biti sudova koji su gramatički *točni* prema pravilima sustava te, štoviše, i istiniti, ali ih se *neće* u sklopu sustava moći dokazati. Drugi poučak o nepotpunosti kaže da bi takav sustav, kad bi uspio dokazati svoju dosljednost, zapravo bio nedosljedan. Bio je to nov, razoran udarac Hilbertovom programu kojem je jedan od ciljeva bio i dokaz vlastite dosljednosti koji bi svaki aksiomatski sustav morao imati.

Predikatni račun Često se koristi kao sinonim za *predikatnu logiku* i *logiku prvog reda*. Predikatni račun *Fregeov* je nastavak *Booleove* logike sudova. U predikatnom računu, osnovni sudovi (ili *predikati*) složeni su predmeti forme $P(a, b, c, \dots)$ gdje je P simbol u jeziku, a a, b, c itd. su *konstante* ili *varijable*. Na primjer, ako je „stariji” sudni simbol, „Platon” konstanta, a „ x ” varijabla, onda je „stariji (Platon, x)” dobro formiranim sudom koji opisuje da je Platon stariji od x . Sudovi ovoga tipa mogu se onda kombinirati uz pomoć Booleovih veznika „i”, „ili”, „ne” i „implicira” te im se mogu kao prefiksi dodavati *Fregeovi* kvantifikatori poput „za sve x ” (pisano kao \forall) i „postoji y ” (pisano kao \exists). Tako „postoji x stariji (x , Platon)” znači da postoji (barem jedan) pojedinac koji je stariji od Platona. Ovo je očito mnogo ambiciozniji pokušaj stvaranja *Leibnizovog calculusa ratiocinatora* od Booleove jednostavnije formalne logike. Korištenjem simbola iz različitih matematičkih područja (poput „ $<$ ”, „ $+$ ” i tako dalje) možemo stvoriti predikate koji izražavaju matematičke tvrdnje na ovom formalnom, logički egzaktnom jeziku. Na primjer, aritmetički poučak koji kaže da je svaki cijeli broj ili parni ili neparni možemo pisati ovako:

$$\forall x \exists y (x = y + y \text{ ili } x = y + y + 1)$$

Strogo definirana verzija predikatnog računa koju nazivamo *logikom prvog reda* koristi se jednostavnim matematičkim objektima poput varijabli dok u *logici drugog reda* varijable mogu biti i *skupovi* zahvaljujući kojima su moguće tvrdnje poput „postoji skup S ”. Ovim moćnijim jezikom može se izraziti cijela matematika. Je li rečenica u predikatnom računu prvog ili drugog reda istinita ili neistinita ovisi o *modelu* prema kojem se rečenica tumači. Tako je, na primjer, jednostavni, gore napisani matematički poučak istinit za cijele brojeve u uobičajenom tumačenju simbola „ $+$ ”, ali postaje neistinitim tumačimo li simbol „ $+$ ” kao množenje. Neke rečenice koje zovemo *valjanima*, međutim, nimalo ne ovise o tumačenju

jer utjelovljuju osnovna svojstva Booleovih veznika i kvantifikatora. *Poučak o potpunosti Kurta Gödela* daje nam jednostavan, potpun aksiomatski sustav za dokazivanje valjanosti u *logici prvoga reda*.

Principia Mathematica Izuzetno utjecajno, ali i vrlo kontroverzno, uglavnom nedovršeno djelo u kojem **Alfred North Whitehead** i **Bertrand Russell** pokušavaju spasiti **Fregeov** grandiozni projekt stvaranja **temelja matematike na logici** u jeku krize koju je izazvao **Russellov paradoks**. Naslov *Principia Mathematica* (Osnove matematike) već je sam po sebi izazvao kontroverzu budući da je identičan naslovu najvećeg Newtonovog djela. Britanska je matematička zajednica velikim dijelom smatrala da je ovakav izbor naslova zapravo neukusan pa čak i bogohulan. Tri toma *Principie*, objavljena 1910., 1912. i 1913. godine temeljila su se na naprednijoj verziji Russellove *teorije tipova*, takozvanoj „razgranatoj“ teoriji tipova, koja je nametala hijerarhijsku strukturu predmetima **teorije skupova**. Takav pokušaj nije mogao polučiti željene rezultate, a da se ne doda nešto što je Russel nazivao **aksiomom reducibilnosti**, zbog čega je cijelo djelo uglavnom i dobilo negativne kritike. Logičari su taj aksiom smatrali suprotnim intuiciji i nategnutim te umjetno stvorenom metodom kojom se problem koji se pokušava riješiti zapravo gura pod tepih. Usprkos tome što nije ispunila ambicije autora, *Principia* je imala veliki utjecaj na oblikovanje moderne logike, a najveći je uspjeh vjerojatno polučila time što je nadahnula **Kurta Gödela** i dala mu kontekst za revolucionarno otkriće, *Poučak o nepotpunosti*.



Russell, Bertrand Rođen u Walesu 1872. godine. Bio je plemenitaš rodom, punim imenom Bertrand Arthur William, treći grof Russell, unuk važnog političara Lorda Johna Russella čiju je titulu kasnije naslijedio. S četiri je godine ostao siročić pa su ga odgajali djed i baka s očeve strane, a kad mu je djed dvije godine kasnije preminuo, samo baka Lady Russell. Odrastao je u obiteljskom domu, vili Pembroke (eng. Pembroke Lodge) u Richmond Parku zapadno od Londona. Russell je danas široj javnosti najpoznatiji kao filozof. Njegova *Povijest zapadne filozofije*, objavljena 1945. godine, i danas je klasični primjer idiosinkratičkog, ali inteligentnog i čitkog pregleda složenih ideja. Zahvaljujući svojem kasnijem mirovnom i protunuklearnom aktivizmu, Russell je postao poznat i na međunarodnoj sceni, ali najveći je doprinos dao matematičkoj **logici** te se tako, uz **Aristotela**, **Boolea**, **Fregea** i **Gödela**, našao uz bok najvećih logičara u povijesti čovječanstva. Usprkos monumentalnom značaju rada na uspostavljanju znanstvene logike, izravnom utjecaju na Gödelova velika otkrića, neizravnom utjecaju na „znanstveni pogled na svijet“ **Bečkog kruga** i filozofijama **logičkog pozitivizma** i **logičkog empirizma**, Russellov je rad na logici zapravo završio objavljivanjem djela *Principia Mathematica* – knjige koju je napisao u suradnji s **Alfredom Northom Whiteheadom** te je završio neposredno prije nego što je napunio četrdesetu. Russell je *Principiu* uglavnom smatrao promašajem jer nije

ostvarila njegovu ambiciju - kao ni ambiciju drugih velikih logičara - o sigurnom zasnivanju matematike na logici. Russell se ženio četiri puta, a imao je troje djece. Njegov prvi sin John kao i Johnova kći oboljeli su od šizofrenije, a ona se i ubila. Ta je patologija vjerojatno samo još jedan izdanak nasljedne mentalne bolesti od koje su bolovali i Russellov stric William i njegova teta Agatha. Tijekom posljednjih desetljeća svojega života, Russell je svu energiju usmjerio na borbu za nuklearno razoružavanje te je tako postao zaštitnim licem pacifizma. Preminuo je 1970. godine.



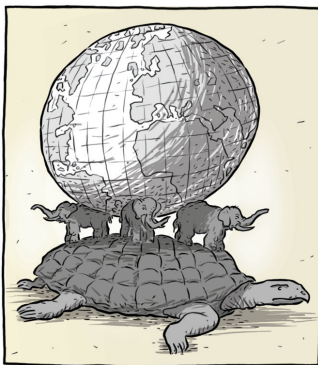
Russellov paradoks Otkriven 1901. godine dok je **Russell** radio na prvoj knjizi o **temeljima matematike**, *Osnove matematike* (objavljena 1903.), paradoks u svojem izvornom obliku ukazuje na glavnu manjkavost **Cantorove teorije skupova**, nastalu iz Bolzanovog jednostavnog koncepta „zbirke elemenata sa zajedničkim svojstvom“. Zahvaljujući općenitosti ove definicije, koju je **Frege** proširio i na **logiku**, možemo govoriti o „skupu skupova“, a s vremenom i o „skupu svih skupova“. Elementi sveobuhvatnog skupa mogu rezultirati definicijom svojstva „samouključivosti“, to jest, skupa koji je sam

sebi element. Tako je, na primjer, skup svih skupova skup (koji time sadrži sam sebe), kao što je to i skup svih stavki na popisu (može i sam biti stavka na popisu), ali skup svih brojeva nije broj pa ne sadrži sam sebe. Polazeći od tog svojstva, možemo definirati „skup svih skupova koji ne sadrže sebe same“ i zajedno s mladim Russellom postaviti sljedeće pitanje: „Sadrži li taj skup sam sebe ili ne?“ Da vidimo što će se dogoditi: ako sadrži sam sebe, iz toga slijedi da je to jedan od skupova koji ne sadrže sami sebe (budući da je to svojstvo svih elemenata toga skupa) pa tako ne može sadržavati sam sebe. No, ako ne sadrži sam sebe, onda nema svojstvo nesadržavanja samog sebe pa time sadrži sam sebe. Ova situacija, u kojoj pretpostavka implicira vlastitu negaciju i obrnuto, naziva se **paradoksom**. Kad se paradoks poput Russellovog pojavi u teoriji, to je pokazatelj da je jedna od osnovnih premisa ili definicija ili jedan od osnovnih **aksioma** pogrešan. Iako se, povijesno gledano, pojavio i razvio kao dio teorije skupova, sam Russell je paradoks kasnije povezao s **pozivanjem na samog sebe**, to jest tvrdnjama koje se pozivaju same na sebe, poput Eubolidove „Ja vam sad lažem.“



Samoreferiranje ili pozivanje na samog sebe (eng. self-reference) doslovno je svojstvo koje ima tvrdnja koja je sama sebi referenca. No, taj se pojam općenito koristi u **logici** i za tvrdnje koje **uključuju same sebe** u popis referenci kao što je to, na primjer, slučaj s pričom o brijaču kojom se objašnjava **Russellov paradoks**. Brijač živi u gradu u kojem je zakonom propisano „da se svi građani

moraju brijati sami ili kod brijača". Ovaj je zakon samouključiv budući da je brijač, osim što je brijač, ujedno i građanin. Samoreferiranje ima važnu ulogu i u matematici i u logici još od vremena starih Grka. Od Eubulidovih tvrdnji koje se pozivaju na sebe same peko **Cantora** čiji se **dokaz neprebrojivosti realnih brojeva** snažno oslanja na brojčanu varijantu samoreferiranja pa do **Russella** i njegovog paradoksa te **Gödel**a. Gödel je zapravo svoj **Poučak o nepotpunosti** dokazao stvorivši tvrdnju, u kontekstu moderne logike, koja je vrlo slična Eubulidovoj. Postoji jedna ključna razlika: Eubulidova tvrdnja kaže „ova je tvrdnja neistinita“ dok Gödelova domišljata verzija zapravo kaže, na aritmetičkom jeziku, „ova je tvrdnja nedokaziva“. Svaka dosljedna aksiomatska teorija u kojoj se može formulirati ovakva tvrdnja nužno je nepotpuna: jer ili je ta tvrdnja *neistinita* pa je onda u tom slučaju i neistinita i dokaziva te proturječna *dosljednosti* aksiomatskog sustava, ili je *istinita* pa je onda i istinita i nedokaziva čime ukazuje na *nepotpunost*.



Temelji matematike Još od Pitagorinog doba matematičari si postavljaju pitanja o naravi matematičke istine, ontologiji matematičkih pojmova i razlozima valjanosti **dokaza** i, općenito govoreći, matematičkog znanja. Od razdoblja prosvjetiteljstva do sredine 19. stoljeća, dominantna je znanstvena ideologija matematiku smatrala jedinim putem prema konačnoj, apsolutnoj istini koja nimalo ne ovisi o sposobnosti ljudskoga uma da je razumije. Smatralo se da osnovni matematički pojmovi odražavaju bitna svojstva svemira, a poučke se smatralo istinama višeg oblika stvarnosti. Tu apsolutnu vjeru u matematiku

odražava i titula „kraljice znanosti“ koju je prije toga nosila teologija. Ovakav se znanstveni pogled obično naziva *matematičkim platonizmom* budući da vuče korijene iz Platonovih gledišta o nadmoći ideja (*eidê*) te, barem djelomično, gledišta njegovog prethodnika Pitagore. No, u 19. stoljeću kod nekih je ljudi poljuljano ovo tradicionalno vjerovanje i to je dovelo do ozbiljne *krize temelja* matematike. Prvo otkriće koje je dovelo do gubitka vjere datira iz razdoblja renesanse. Radi se o otkriću *imaginarnih brojeva* (onih koji sadrže kvadratni korijen minus jedan). Pojava *neeuklidovske geometrije* u 19. stoljeću ojačala je argumente protiv „očigledne“ istine **aksioma**. Najproblematičniji matematički pojam bio je, međutim, problem beskonačnosti. Probleme matematičkog pristupa beskonačnosti prvi je u svojim paradoksima nagovijestio Zeno, a ponovno su se pojavili u 18. stoljeću s izumom računa te loše definiranim, intuiciji suprotnim, konceptom *infinitesimala*. Vrhunac su dostigli u posljednjih dvadeset godina 19. stoljeća, posebice s **teorijom skupova** i rezultatima o beskonačnim skupovima **Georga Cantora**. Problemi koji su se pojavili s teorijom skupova - a najveći od njih je **Russellov paradoks** - kulminirali su ozbiljnim sumnjama u „očiglednost“ istina, a time i, neizravno, u vrijednost matematičkog znanja. Potragu za temeljima

matematike uglavnom je hranila želja da se nadiđe te sumnje. „Program“ koji je proglasio [David Hilbert](#) ranih 1920-ih godina i nazvao ga svojim imenom, izražavao je najoptimističniju verziju sna o temeljima: stvaranje formalnog sustava za svu matematiku koji bi sadržavao i dokaz da je ta aksiomatizacija *dosljedna* (tj. ne može dovesti do kontradikcija), *potpuna* (ne ostavlja nedokazivih istina) i *nedvojben*a (u svakoj se prilici može, uz pomoć algoritama, utvrditi slijedi li formula iz aksioma ili ne).

Teorija skupova Nauka o skupinama predmeta koje povezuje neko zajedničko svojstvo - ponekad to svojstvo može biti samo pripadnost istome skupu kao što je to, na primjer, slučaj s nasumično definiranim skupom čiji su članovi brojevi 2, 3, 8, 134, 579. Prvi je skupove proučavao češki matematičar Bernard Bolzano (1781.-1848.) koji je također uveo i pojam *menge* („skup“) te definirao pojam *kardinalnosti* skupa, to jest „veličine“ skupa, načinom koji ne podrazumijeva mjerenje. Tako možemo govoriti o dva skupa iste kardinalnosti ako se njihovi elementi mogu međusobno pridružiti jedan-na-jedan, a da nikad ne znamo točan broj elemenata u skupu. Velika je prednost ovog pristupa što je primjenjiv i na skupove s beskonačno mnogo članova na koje se ne može primijeniti pojam broja: matematičari „beskonačno mnogo“ ne smatraju brojem. Bolzano nije dalje razvijao svoju teoriju zbog nekih paradoksa, poput činjenice da se *cijele* i *parne* brojeve može pridružiti jedan-na-jedan (jednostavno množenjem svakog cijelog broja s 2 ili dijeljenjem svakog parnog broja s 2) te tako pokazati da podskup ima isti kardinalni broj kao i skup. Napredna matematička teorija skupova začeta je 7. prosinca 1873. godine kad je [Georg Cantor](#) poslao pismo svojem učitelju, Richardu Dedekindu, opisujući svoj [dokaz neprebrojivosti realnih brojeva](#) (skupa cijelih brojeva, decimalnih brojeva, nule i negativnih brojeva) i uspoređujući ga s [prebrojivošću racionalnih brojeva](#) (svih razlomaka), koji je također dokazao. Prebrojivost definiramo kao odnos jedan-na-jedan s *prirodnim* brojevima 1, 2, 3, ... itd. Koncept skupa gotovo je previše primitivan da bi ga se matematički definiralo i gotovo ga je nemoguće definirati, a da se ne uporabi neki sinonim (ovdje smo koristili riječ „skupina“). Upravo je ta „prirodnost“ koncepta u Bolzanovom i Cantorovom radu dovela do [Russellovog paradoksa](#). Želimo li ga nadići i izbaciti manjkav koncept „skupa svih skupova“ koji paradoks uvodi, moramo pronaći strukturu koja ide odozdo prema gore i [aksiome](#) za skupove kakve nalazimo u djelu [Principia Mathematica](#) te kasnijem sustavu nazvanom „ZFC“ prema imenima dvaju znanstvenika koji su ga osmislili - Ernsta Zermela i Abrahama Fraenkela. Nužno je još dodati i aksiom izbora koji teoriji omogućuje da se bavi beskonačnim skupovima. Neki teoriju skupova smatraju najosnovnijom granom matematike budući da se njome može definirati sve ostale grane. Ovo su glavne crte pretjerano ambicioznog projekta koji je pokrenula skupina briljantnih francuskih matematičara 1930-ih koja je radove objavljivala pod zajedničkim pseudonimom „Nicolas Bourbaki“.

Tractatus Logico-Philosophicus **Ludwig Wittgenstein** napisao je svoje najvažnije djelo tijekom Prvog svjetskog rata koristeći se svojim prijeratnim bilješkama i idejama o **logici**. Djelo (prema njegovim riječima) sadrži rješenje „svih problema filozofije“, a bavi se svijetom, označavanjem i jezikom. Izvorni naziv djela je *Logische-Philosophische Abhandlung* (eng. „Logical-Philosophical Treatise“), a za potrebe objavljivanja u Engleskoj preimenovano je na zahtjev G. E. Moorea koji je bio skloniji latinskom nazivu. Wittgenstein u *Tractatusu* koristi mnoge logičke tehnike i ideje, posebice **Fregeove** i **Russellove**, kao i otkrića potpuno različitih filozofskih stavova, poput onih Arthura Schopenhauera. Iako je tada potpuno nepoznati Wittgenstein uspio objaviti knjigu tek kad mu je Russell pristao napisati uvod u kojem je knjigu nazvao „važnim događajem u svijetu filozofije“, *Tractatus* ih je posvađao. Wittgenstein je smatrao da je Russellov, ne sasvim pohvalni, uvod u djelo prepun pogrešno shvaćenih ideja i filozofskih grešaka, a za Russella je *Tractatus* bio prvi znak Wittgensteinovog pada prema - kako mu se činilo - misticizmu. Stroga struktura knjige daje sedam osnovnih tvrdnji, a o svakoj je napisano jedno poglavlje. Unutar poglavlja svaka se tvrdnja dalje razrađuje u prilično pedantistički, i ponekad zbunjujući, organizirane stavove (eng. proposition, njem. satz) označene brojevima. Prva dva stava (1 i 2) elaboriraju tvrdnju da je „svijet sve što je slučaj“ te da su *činjenice* i *kombinacije* činjenica „ono što je slučaj“. To je odmak o klasične filozofije i metafizike, posebice **Aristotelove**, prema kojoj se svijet sastoji od stvari. U logičkom jeziku *Tractatusa* postoje i stvari kao dio općeg stanja, ali samo u složenim međusobnim kombinacijama i odnosima, a ne kao osnovne građevne jedinice. Stavovi 3 i 4 uglavnom se bave onime što danas nazivamo *slikovnom* teorijom jezika prema kojoj je „misao smisleni stav“. U ovome dijelu prelazi na označavanje i jezik i misli ograničava na logične tvrdnje, ali u kontekstu i u odnosu sa svijetom. Ovo je možda najsuptilniji dio knjige koji se odnosi i na Wittgensteinovo viđenje matematike i logike kao strojeva za proizvodnju *tautologija*. Stavovima 5 i 6 razrađuje ideju da su „molekularni stavovi istinosne funkcije elementarnih stavova“ u kojima se koristi matematičko-simboličko znakovlje da bi se objasnilo što je to točno istinosna funkcija. Ovdje se Wittgenstein koristi logikom u kombinaciji s Booleovim zakonima kompozicije da bi definirao stavove (a time i jezik i misao) kao kombinacije *atomskih* ili *elementarnih* stavova. U ovome se dijelu knjige zapravo prvi put spominje „metoda istinosne tablice“ koju primjenjuje na **Booleove** funkcije. Posljednji, sedmi stav u knjizi je: „O čemu se ne može govoriti, o tome se mora šutjeti“. (citati u originalnom tekstu uzeti su iz prijevoda D. F. Pearsa i B. F. McGuinessa). Posljednji stav ima dva potpuno različita tumačenja. Jedno je krajnje *pozitivističko* tumačenje **Bečkoga kruga** prema kojem je „ono o čemu se ne može govoriti“ (logički) doslovno *beksmislica*, a prema drugom, koje je dao sam Wittgenstein i ostali, a koje je Russell nazvao „mističnim“, upravo je „ono o čemu se ne može govoriti“ uistinu važno. *Tractatus* je jedna od najutjecajnijih i najproučavanijih knjiga zapadnjačke filozofije. Imala je višestruki utjecaj, a vjerojatno je utjecala i na način na koji danas funkcioniraju računala i baze podataka - i u svakom je slučaju obranila svoje tvrdnje.



Turing, Alan Rođen u Londonu 1912. godine, ovaj se veliki britanski matematičar općenito smatra ocem računalne znanosti. Turing je dao svoj doprinos mnogim matematičkim područjima, ali najviše ga se pamti po jednom od prvih rezultata koje je postigao u **logici**. Dok je studirao na Cambridgeu, očarali su ga **temelji matematike**, posebice **Poučak o nepotpunosti Kurta Gödela** koji ga je nadahnuo da prouči **Hilbertov Entscheidungsproblem** („problem odluke“), problem koji je preživio Gödelovu analizu. **Entscheidungsproblem** postavlja pitanje postoji li, ako imamo logički sustav, **algoritam** kojim se može odlučiti je li neki sud dokaziv unutar sustava ili ne. Turingov je odgovor bio razočaravajuće „ne“. Da bi došao do odgovora, morao je najprije strogo definirati pojam algoritma. Njegova domišljata definicija s „teoretskim“ strojem kojim se upravlja **centralno**, te **memorijskom vrpcom**, **ulazom** i **izlazom** najavila je pojavu digitalnog računala i izvršila ogroman

utjecaj na računalnu praksu i teoriju. **Turingovi strojevi**, kako ih nazivamo danas, i današnja računala imaju jedno ključno zajedničko svojstvo - **univerzalnost**. To zapravo znači da stroj može obaviti *bilo koju* računalnu zadaću ako mu se za to izradi odgovarajući **program**. Druga su dva matematičara, Alonzo Church (kasniji Turingov mentor na doktoratu na Princetonu) i Emil Post, neovisno jedan o drugome, ali istovremeno, otkrili algoritamske formalizme za koje se s vremenom pokazalo da su jednaki Turingovima. No, upravo je Turingova formalizacija bila najutjecajnija, najviše zbog posvemašnje jednostavnosti osnovne strukture koja, usprkos tome, može polučiti vrlo složene rezultate. Turingov rad na algoritmima i metodama općeg rješavanja problema, kao i rad ostalih spomenutih matematičara, očito je prerastao potragu za temeljima. Potraga je zapravo time kulminirala. Tijekom Drugog svjetskog rata Turing je predsjedao osmišljavanjem i izgradnjom dvije serije elektroničkih računala, „Bombe“ i „Colossus“. Računala su bila vrlo uspješna, čak ključna za uspjeh u ratu. Probila su nekoliko njemačkih šifri, uključujući i zloglasnu „Enigmu“ njemačke mornarice. Nakon rata, Turing je radio u tek nastaloj britanskoj računalnoj industriji, bavio se važnim pitanjima u biologiji te utemeljio znanstveno polje **umjetne inteligencije** predloživši takozvani **Turingov test** kojim bi se utvrdilo je li predmet sposoban misliti. Oduvijek su ga zanimali sportovi i društvene igre. Bio je uspješan dugoprugaš, a i prvi je razradio ideju o programu za igranje šaha smatrajući da je izvrsno igranje šaha vještina kojoj bi graditelji inteligentnih strojeva trebali težiti. Godine 1952. izveden je pred sud zbog homoseksualizma koji je u to vrijeme u Britaniji bio kazneno djelo. Da bi izbjegao kaznu zatvora, pristao se podvrći eksperimentalnom liječenju estrogenom koje je najvjerojatnije uzrokovalo tešku depresiju zbog koje se 1954. godine ubio.



Von Neumann, John Rođen u Budimpešti 1903. godine („John“ je engleska inačica mađarskog imena „Janos“). Von Neumann je vrlo rano počeo pokazivati visoke intelektualne sposobnosti. Do šeste je godine napamet dijelio s osmeroznamenastim brojevima te tečno govorio starogrčki. Studirao je matematiku u Budimpešti te obranio doktorat s dvadeset i dvije godine. U međuvremenu je, budući da je njegov otac to želio, studirao i kemijsko strojarstvo na poznatom Tehnološkom fakultetu Sveučilišta u Zurichu. Ubrzo je postao matematička zvijezda svoje generacije, poznat po prodornoj i temperamentnoj

matematičkoj genijalnosti. Nakon predavanja na kojem je **Gödel** objavio svoj **Poučak o nepotpunosti**, Von Neumann je među prvima shvatio značaj tog rezultata i uistinu je nakon predavanja rekao: „Svemu je kraj“. No, dao je Gödelu i ključni prijedlog te dokazao drugi poučak o nepotpunosti - koji je u međuvremenu dokazao i sam Gödel. Von Neumann nije nikad ponovno radio na **temeljima matematike**. Njegov je matematički genij bio vrlo širokog raspona pa je dao doprinos mnogim matematičkim granama uključujući teoriju skupova, operativnu algebru, ergodsku teoriju i statistiku. Zbog širokog su ga doprinosa nazivali „posljednjim velikim matematičarom“. Značajan je i njegov rad na kvantnoj teoriji, fluidnoj mehanici i matematičkoj ekonomici. S ekonomistom Oscarom Morgensternom jedan je od osnivača *teorije igara*. Tijekom Drugog svjetskog rata bio je jedan od tvoraca atomske bombe, a kasnije je rukovodio odborom vlade SAD-a za izgradnju hidrogenske bombe. No, možda je ipak najveći doprinos dao stvaranju računala. Dok je kao konzultant radio na jednom od prvih elektroničkih računala 1946. godine., pao je pod utjecaj **Turingovih** ideja te razvio čitavu lepezu konstrukcijskih načela uključujući *središnju procesnu jedinicu* te posebne memorijske uređaje za *pohranu i podataka i programa*. Gotovo sva su računala kasnije napravljena prema ovom osnovnom modelu koji je danas poznat pod nazivom *Von Neumannova arhitektura*. Von Neumann je postao jedan od prvih velikana računalne tehnologije, posebice u području koje danas nazivamo *znanstvenim računarstvom*. Umro je 1957. od raka, što je vjerojatno bilo posljedica termonuklearnih testiranja.



Whitehead, Alfred North Engleski matematičar i filozof, rođen 1861. godine. Studirao je matematiku na Cambridgeu gdje je kasnije i dugo predavao. Godine 1891. oženio se s Evelyn Wade, mnogo mlađom Irkinjom. Prije početka intenzivne desetogodišnje suradnje s **Bertrandom Russellom** na knjizi **Principia Mathematica**, Whitehead je objavio knjigu *Univerzalna algebra* koja je zapravo bila pokušaj proučavanja tipova simboličkog razmišljanja u različitim algebarskim sustavima sa, za njegovo vrijeme, vrlo modernog formalnog gledišta. Nakon što je Russell 1913. godine odustao od *Principie*,

Whitehead je pokušao sam napisati četvrti tom o geometriji, ali ga nikad nije dovršio. Njih su dvojica nakon objavljivanja *Principie* vrlo malo kontaktirali, a Whitehead je u međuvremenu prešao na matematičku fiziku i kasnije filozofiju pa nije sudjelovao na drugom izdanju knjige 1925. godine. Umro je 1947. godine.



Wittgenstein, Ludwig Wittgensteina mnogi smatraju najvećim filozofom dvadesetog stoljeća. Bio je jedno od osmero djeca industrijalca Wittgensteina, jednog od najbogatijih i najmoćnijih ljudi u Austriji, velikog mecene. Imao je četiri brata. Trojica su se ubila još kao mladići, a četvrti, Paul, je postao poznati koncertni pijanist. Nakon dvije godine studija strojarstva, Wittgenstein se zainteresirao za **logiku** i **temelje matematike**. Posjetio je **Fregea** koji ga je uputio **Russellu** na Cambridge. Wittgenstein je poslušao savjet. Bio je to odnos koji je duboko utjecao na

obojicu, no vjerojatno više na učitelja. Tijekom vojne službe u austrougarskoj vojsci u Prvom svjetskom ratu Wittgenstein je dobio nekoliko odličja za hrabrost te su ga uglavnom hvalili zbog nevjerojatne smirenosti pod paljbom („sang-froid“). Nakon nekog vremena je pao u zarobljeništvo te je svoj opus magnum, *Tractatus Logico-Philosophicus*, završio u talijanskom logoru. Nakon rata je ogromno nasljedstvo dao trima sestrama i nakon što je, kako je sam tvrdio, *Tractatusom* „riješio sve probleme u filozofiji“, nastavio je raditi kao arhitekt, vrtlar te nastavnik u malom selu u Donjoj Austriji. Godine 1929. se, možda nadahnut kontaktima s članovima **Bečkog kruga**, a možda predavanjem Luitzena Brouwera o **intuicionizmu**, vratio na Cambridge i nastavio baviti filozofijom. Svoj je rani rad odbacio kao dogmatski i bacio se na stvaranje novog, izuzetno utjecajnog filozofskog stajališta koje se često naziva „kasnim Wittgensteinom“. Te kasnije filozofske ideje nije pokušavao sistematizirati kao što je to učinio ranije s *Tractatusom*. Predstavio ih je kao manje-više neovisne napomene. Smatrao je da bi se mnoge od njih moglo pretočiti u knjigu. Knjiga je objavljena posthumno pod nazivom *Filozofska istraživanja*. Ta je knjiga zajedno s nekoliko drugih djela utemeljenih na bilješkama te prijepisom predavanja i rasprava jedino što je ostalo od njegove kasnije filozofije. Radi se izrazito antidogmatskom filozofskom stajalištu koje je usredotočeno na **jezik** i **psihologiju** (ono što danas nazivamo *kognitivnom psihologijom*) te na nejasne pojmove poput „obiteljska sličnost“ i „jezične igre“, a ne na logiku i objektivnu istinu. Ne sadrži jasne definicije i stavove. Kasniju Wittgensteinovu fazu obilježila je snažna kritika dotadašnje filozofske prakse - i njegove i tuđe. Russell je najviše zbog te kritike odbacio Wittgensteinov kasniji rad te ustvrdio da je Wittgenstein odlučio „postati mistikom“. Wittgensteinu se matematika sve više činila običnom praktičnom aktivnošću za koju je jedino opravdanje sama primjena. Većina negativnih kritika o matematici može se pronaći u prijepisu bilježaka za predavanja na Cambridgeu. Posebno je zanimljiv dijalog između Wittgensteina i jednog od polaznika njegovih predavanja, **Alana Turinga**, koji se nimalo nije slagao s njegovim idejama o matematici. Wittgenstein je umro 1951. godine.